BAB II

MATERI DASAR

2.1 Matriks

DEFINISI 1

Matriks berukuran mxn adalah susunan berbentuk empat persegi panjang dari mn skalar (bilangan riel atau komplek) yang disusun atas m baris dan n kolom, yang dinotasikan sebagai,

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad Q = [\ q_{ij}\ ].[\ mxn\ ]$$

DEFINISI 2

Jika $A = [\ a_{ij}\ ].[\ pxq\ ]$ dan $B = [\ b_{ij}\ ].[\ qxr\ ]$ maka perkalian matriks AB adalah matriks $C = [\ c_{ij}\ ].[\ pxr\ ]$ dengan,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, p$ dan $j = 1, 2, \ldots, r$.

DEFINISI 3

Jika $A = [\ a_{ij}\ ].[\ mxn\ ]$ dan $B = [\ b_{ij}\ ].[\ mxn\ ]$ maka $A + B$ adalah suatu matriks $C = [\ c_{ij}\ ].[\ mxn\ ]$ dengan, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

DEFINISI 4

Transformasi baris dengan kolom dari matriks $Q = [\ q_{ij}\ ].[\ mxn\ ]$ disebut dengan transpos dari matriks Q, dinotasikan dengan $Q^T = [\ q_{ji}\ ].[\ nxm\ ]$.

DEFINISI 5

Matriks Q sedemikian sehingga $Q = Q^T$, T = *transpos* disebut matriks simetri.

2.2 KALKULUS

Dalam sub-bab 2.2 ini diasumsikan $X, \Delta X_j, X_0, Y \in E^n$ (E^n= Ruang Euclid berdimensi n).

DEFINISI 6

Misalkan $\Delta X_j = [\ 0,0,\ldots,\delta x_j,\ldots,0,0\ ]$ adalah vektor yang seluruh komponennya adalah nol kecuali komponen ke-j yang dinyatakan dengan δx_j maka derivatip parsial dari fungsi $f(\ X\ )$ terhadap setiap komponennya didefinisikan sebagai,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\delta x_j \to 0} \frac{f(\ X + \Delta x_j\ ) - f(\ X\ )}{\delta x_j}$$

DEFINISI 7

Jika fungsi $f(X)$ mempunyai derivatip parsial kontinu pada setiap peubahnya maka $f(\ X\ )$ differensiabel.

DEFINISI 8

Fungsi $f(\ X\ )$ kontinu di X_0 bila untuk $\forall\ \eta > 0$,

$$\exists\ \delta > 0 \ni |\ X - X_0| < \delta \longrightarrow |\ f(\ X\ ) - f(\ X_0)\ | < \eta$$

DEFINISI 9

Jika fungsi $f(\ X\ )$ differensiabel maka turunan berarah $f(\ X\ )$ di X pada arah vektor satuan Y adalah,

$$Y^T\ \nabla f(\ X\ ) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\ X + tY\ ) - f(\ X\ )}{t}$$

2.3 Bentuk Kuadratik

Pada sub-bab 2.3 ini, $Q = [\ q_{ij}\ ][\ nxn\ ]$ dari bentuk kuadratik $X^TQ\ X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_iq_{ij}x_j$ dengan $X = [\ x_1\ x_2 \cdots x_n\ ]$, diasumsikan simetri.

DEFINISI 10

Matriks Q adalah definit positip bila hanya bila, $X^TQ\ X > 0,\ \forall\ X \neq 0.$

CONTOH 1 :

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks definit positip sebab,

$$X^TQ\ X = [\ x_1\ x_2\ ]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 > 0,\ \forall\ X \neq 0$$

DEFINISI 11

Matriks Q adalah semidefinit positip bila hanya bila

$$X^TQ\,X \geq 0, \quad \forall\, X \text{ dan } \exists\, X \neq 0 \Rightarrow X^TQ\,X = 0.$$

CONTOH 2 :

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks semidefinit positip sebab

$$X^TQ\,X = [\,x_1\; x_2\,]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 \geq 0, \quad \forall\, X$$

Dan untuk suatu $X \neq 0$ (misal $x_1 = 0$ dan $x_2 \neq 0$) didapatkan, $X^TQ\,X = 0.$

AKIBAT 1

Jika Q semidefinit positip maka $\exists\, X \neq 0 \Rightarrow Q\,X = 0.$

BUKTI :

Menurut definisi 11, Q semidefinit positip bila hanya bila $X^TQ\,X \geq 0, \;\forall\, X$ dan $\exists\, X \neq 0 \Rightarrow X^TQ\,X = 0.$

Dengan demikian untuk Y, Z sembarang (Y matriks dan Z skalar) dan suatu $X \neq 0$ dapat dibentuk,

$$0 \leq \{\, Y + ZX \,\}^TQ\,\{\, Y + ZX \,\} = Y^TQ\,Y + 2Z\{\, Y^TQ\,X \,\}$$

Bentuk ini hanya mungkin dipenuhi bila, $Y^TQ\,X = 0.$

Mengingat Y adalah sembarang maka $Q\,X = 0.$

2.4 KOMBINASI KONVEK, HIMPUNAN KONVEK DAN FUNGSI KONVEK

Pada sub-bab ini diasumsikan $X_1, X_2, X \in S \subseteq E^n$ (E^n= Ruang Euclid berdimensi n).

DEFINISI 12

Himpunan S konvek bila hanya bila $\forall\, X_1, X_2 \in S \Rightarrow X \in S,$

dengan, $X = \lambda X_1 + \{ 1-\lambda \} X_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

DEFINISI 13

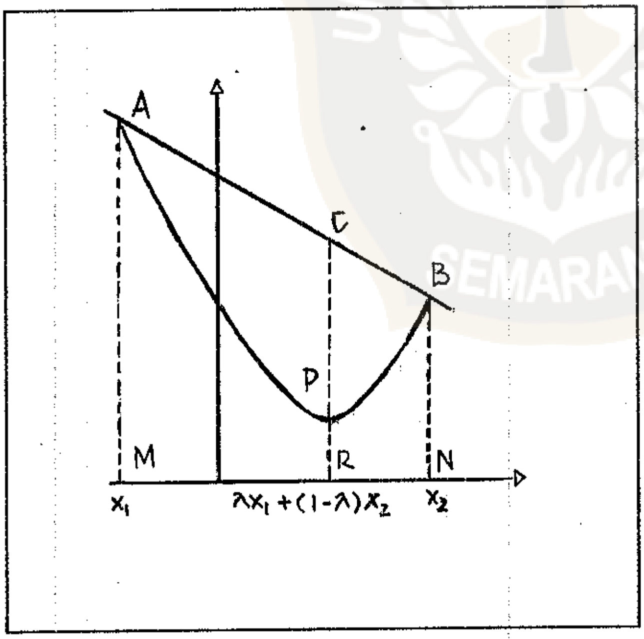
$X = \lambda X_1 + \{ 1-\lambda \} X_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$ disebut sebagai komnasi linier konvek dari X_1 dan X_2.

DEFINISI 14

Fungsi $f(X)$ konvek pada himpunan konvek S bila hanya bila

$f(\lambda X_1 + \{ 1-\lambda \} X_2) \leq \lambda f(X_1) + \{ 1-\lambda \} f(X_2)$

dengan, $X = \lambda X_1 + \{ 1-\lambda \} X_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$



Keterangan :

$MA = f(X_1)$,

$NB = f(X_2)$,

$RP = f(\lambda X_1 + \{1-\lambda\}X_2)$,

$RC = \lambda f(X_1) + \{1-\lambda\} f(X_2)$,

$RP \leq RC$

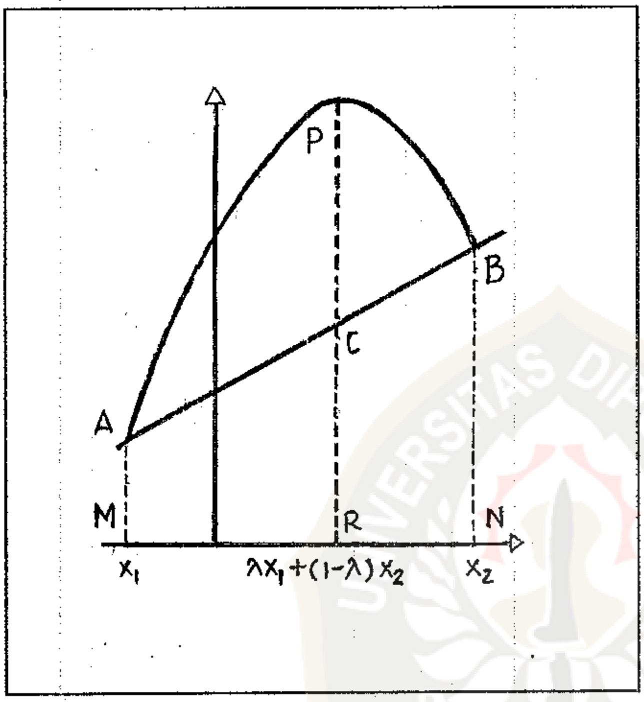
Gambar 2. Fungsi Konvek

DEFINISI 15

Fungsi $f(X)$ konkaf pada himpunan konvek S bila hanya bila,

$$f(\lambda X_1 + \{1-\lambda\} X_2) \geq \lambda f(X_1) + \{1-\lambda\} f(X_2)$$

dengan, $X = \lambda X_1 + \{1-\lambda\} X_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$



Keterangan :

$MA = f(X_1)$,

$NB = f(X_2)$,

$RP = f(\lambda X_1+\{1-\lambda\}X_2)$,

$RC = \lambda f(X_1)+\{1-\lambda\}f(X_2)$,

$RP \geq RC$

Gambar 3. Fungsi Konkaf

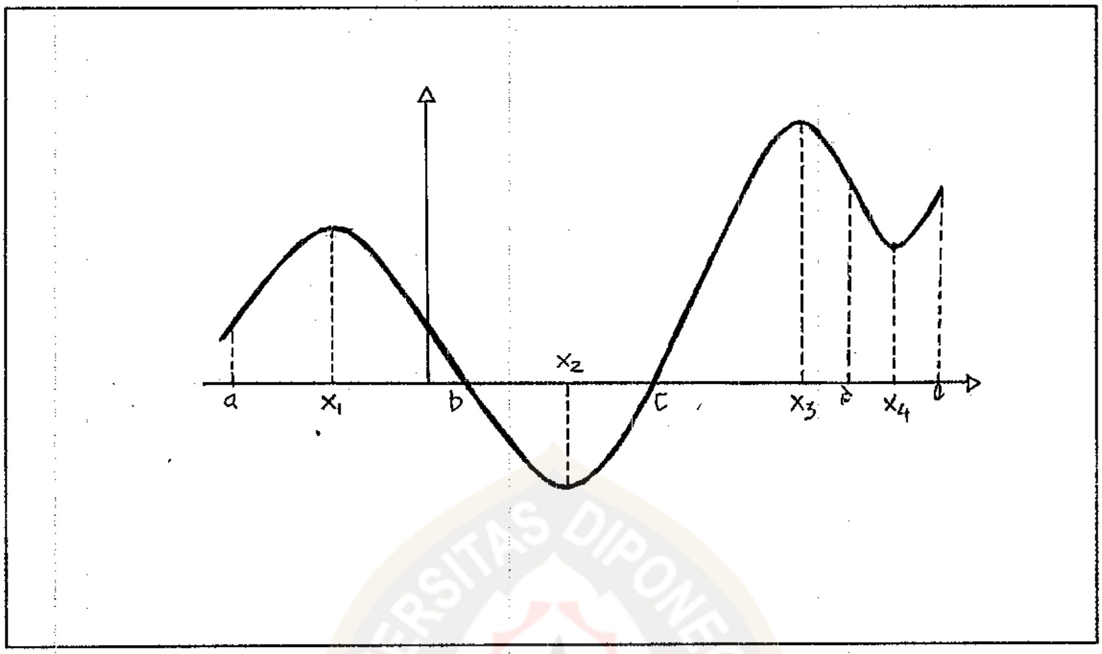
DEFINISI 16

Fungsi $f(X)$ mempunyai minimum global pada $X_0 \in S$ bila hanya bila $f(X_0) \leq f(X)$, $\forall X \in S$

DEFINISI 17

Fungsi $f(X)$ mempunyai minimum lokal di $X_0 \in \bar{S} \subseteq S$, bila hanya bila terdapat persekitaran $\bar{S}$ dari X_0 sedemikian sehingga $f(X_0) \leq f(X)$ untuk setiap X di dalam persekitaran $\bar{S}$.

CONTOH 3 :



Misal $\overline{S} = [\ a,e\ ] \subseteq S = R^2$ dengan,

$\overline{S}_1 = [\ a,b\ ],\quad \overline{S}_2 = [\ b,c\ ],\quad \overline{S}_3 = [\ c,d\ ],\quad \overline{S}_4 = [\ d,e\ ],$

$\overline{S} = (\ \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2\ ) \cup (\ \overline{S}_3 \cup \overline{S}_4\ )$

maka

$x_1 \in \overline{S}_1$ dan $x_3 \in \overline{S}_3$ adalah titik-titik maksimum lokal,

$x_2 \in \overline{S}_2$ dan $x_4 \in \overline{S}_4$ adalah titik-titik minimum lokal,

$x_2,\ x_3 \in \overline{S} \subseteq S$ masing-masing merupakan titik minimum dan maksimum global dari $f(\ X\ )$.

AKIBAT 2

Fungsi linier adalah konvek sekaligus konkaf.

BUKTI :

Misalkan, $f(\ X\ ) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ adalah fungsi linier

dengan, $X = \lambda Y + (\ 1-\lambda\ )\ Z\ ,\quad 0 \le \lambda \le 1$

maka, $f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \lambda y_j + \{1-\lambda\} z_j \right\}$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \left\{ 1-\lambda \right\} \sum_{j=1}^{n} c_j z_j$$

$$= \lambda f(Y) + \{1-\lambda\} f(Z)$$

Menurut definisi 14 dan 15, $f(X)$ konvek sekaligus konkaf.

AKIBAT 3

Jumlahan terbatas dari fungsi-fungsi konvek adalah konvek.

BUKTI :

Jika $f_i(X)$, $i=1,2,...,n$ adalah fungsi-fungsi konvek maka akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{n} f_i(X)$ juga konvek. Karena $f_i(X)$, $i=1,2,...,n$ konvek maka menurut definisi 14 berlaku,

$$f_i(X) \leq \lambda f_i(X_1) + \{1-\lambda\} f_i(X_2)$$

dengan $\lambda \in [0,1]$, $X = \lambda X_1 + \{1-\lambda\} X_2$ sedemikian sehingga jika $f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X)$ diperoleh,

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda X_1 + \{1-\lambda\} X_2)$$

$$\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i(X_1) + \{1-\lambda\} \sum_{i=1}^{n} f_i(X_2)$$

$$= \lambda f(X_1) + \{1-\lambda\} f(X_2)$$

Menurut definisi 14, $f(X)$ konvek. Demikianlah jumlahan terbatas dari fungsi-fungsi konvek juga konvek.

AKIBAT 4

Misal $X \in E^n$, $X^T = [\ x_1\ x_2 \cdots x_n\ ]$, $Q = [\ q_{ij}\ ][\ nxn\ ]$ matriks simetri yang definit positip maka $X^T Q\ X$ adalah konvek.

BUKTI :

Karena Q definit positip maka menurut definisi 10 berlaku $X^T Q\ X > 0$ sedemikian sehingga dapat dibentuk,

$$\lambda\{\ \lambda - 1\ \}\ X^T Q\ X > 0,\ \lambda \in (\ 0,1\ )$$

$$\text{atau } 0 < \lambda^2\ X^T Q\ X < \lambda\ X^T Q\ X.$$

Misalkan $f(\ X\ ) = X^T Q\ X$, $X = \lambda X_1 + \{\ 1-\lambda\ \}X_2$ maka

$$\begin{aligned} f(\ X\ ) &= f(\ \lambda X_1 + \{\ 1-\lambda\ \}X_2\ ) \\ &= \{\ \lambda X_1 + \{\ 1-\lambda\ \}X_2\ \}^T\ Q\ \{\ \lambda X_1 + \{\ 1-\lambda\ \}X_2\} \\ &= \{\ X_2 + \lambda\{\ X_1 - X_2\ \}^T\ Q\ \{\ X_2 + \lambda\{\ X_1 - X_2\ \}\ \} \\ &= X_2^T Q\ X_2 + 2\lambda\{\ X_1 - X_2\ \}^T\ Q\ X_2 \\ &\quad + \lambda^2\{\ X_1 - X_2\ \}^T Q\ \{\ X_1 - X_2\ \} \\ &< X_2^T\ Q\ X_2 + \lambda\{\ X_1 - X_2\ \}^T Q\ X_2 + \lambda\{\ X_1 - X_2\ \}^T Q\ X_1 \\ &= \lambda X_1^T Q\ X_1 + \{\ 1-\lambda\ \}X_2^T Q\ X_2 \\ &= \lambda f(\ X_1\ ) + \{\ 1-\lambda\ \}f(\ X_2) \end{aligned}$$

Menurut definisi 14, $f(\ X\ ) = X^T Q\ X$ konvek.

AKIBAT 5

Misal $X \in E^n$, $X^T = [\ x_1\ x_2 \cdots x_n\ ]$, $Q = [\ q_{ij}\ ][\ nxn\ ]$ matriks simetri yang semidefinit positip maka $X^T Q\ X$ konvek.

BUKTI :

Karena Q semidefinit positip maka menurut definisi 11 berlaku $X^TQ\,X \geq 0$ sedemikian sehingga dapat dibentuk,

$$\lambda\{\,\lambda-1\,\}\,X^TQ\,X \geq 0,\ \lambda \in [\,0,1\,]$$

$$\text{atau } 0 \leq \lambda^2\,X^TQ\,X \leq \lambda\,X^TQ\,X.$$

Misalkan $f(\,X\,) = X^TQ\,X,\quad X = \lambda X_1 + \{\,1-\lambda\,\}X_2$ maka

$$
\begin{aligned}
f(\,X\,) &= f(\,\lambda X_1 + \{\,1-\lambda\,\}X_2\,)\\
&= \{\,\lambda X_1 + \{\,1-\lambda\,\}X_2\,\}^T\,Q\,\{\,\lambda X_1 + \{\,1-\lambda\,\}X_2)\\
&= \{\,X_2 + \lambda\{\,X_1-X_2\,\}^T\,Q\,\{\,X_2 + \lambda\{\,X_1-X_2\,\}\,\}\\
&= X_2^TQ\,X_2 + 2\lambda\{\,X_1-X_2\,\}^T\,Q\,X_2\\
&\qquad + \lambda^2\{\,X_1-X_2\,\}^TQ\,\{\,X_1-X_2\,\}\\
&\leq X_2^T\,Q\,X_2 + \lambda\{\,X_1-X_2\,\}^TQ\,X_2 + \lambda\{\,X_1-X_2\,\}^TQ\,X_1\\
&= \lambda X_1^TQ\,X_1 + \{\,1-\lambda\,\}X_2^TQ\,X_2\\
&= \lambda f(\,X_1\,) + \{\,1-\lambda\,\}f(\,X_2)
\end{aligned}
$$

Menurut definisi 14, $f(\,X\,) = X^TQ\,X$ konvek.

TEOREMA 1

Setiap minimum lokal dari fungsi konvek $f(\,X\,)$ merupakan minimum global.

BUKTI :

Karena $f(\,X\,)$ adalah konvek maka sesuai definisi 14,

$$f(\,\lambda X^* + \{\,1-\lambda\,\}X_L\,) \leq \lambda f(\,X^*\,) + \{\,1-\lambda\,\}\,f(\,X_L\,).$$

Andaikan X_L minimum lokal yang bukan minium global dari $f(\,X\,)$ maka sesuai definisi 16 ada X, misalkan X^*

yang memenuhi $f(X^*) < f(X_L)$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(\lambda X^* + (1-\lambda)X_L) &\le \lambda f(X^*) + (1-\lambda)f(X_L) \\ &< \lambda f(X_L) + (1-\lambda)f(X_L) \\ &= f(X_L). \end{aligned}$$

Dan untuk $\lambda \in (0,1)$ yang relatif kecil, titik

$X = \lambda X^* + (1-\lambda)X_L$

berada di dalam persekitaran X_L sedemikian sehingga menurut definisi 17, X_L bukanlah minimum lokal dari $f(X)$. Kontradiksi. Sebab menurut ketentuan X_L adalah minimum lokal dari $f(X)$. Pengandaian diingkar dan terbukti X_L sebagai titik minimum global.

2.5 PROGRAM KONVEK

Secara umum, program konvek adalah program matematika yang meminimalkan fungsi konvek (memaksimalkan fungsi konkaf) pada daerah domain konvek.

Misalkan masalah yang diambil adalah,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Meminimalkan,} \\ \quad f(X) \\ \text{dengan kendala,} \\ \quad g_i(X) \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \\ \quad X \ge 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

dengan, $f(X)$ dan $g_i(X)$ adalah fungsi dari n peubah X yang konvek dan differensiabel.

Dengan pengali Lagrange, masalah berkendala di atas dapat diubah menjadi masalah tanpa kendala, yaitu dengan membentuk fungsi Lagrange $\mathcal{L}(X,\lambda)$ sebagai,

$$\mathcal{L}(X,\lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X),\ \lambda \geq 0 \quad \text{.............} (4)$$

dengan, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$ sebagai pengali Lagrange.

DEFINISI 18

$[X_0,\lambda_0]$ adalah titik pelana non negatip dari $\mathcal{L}(X,\lambda)$ bila hanya bila,

$$\mathcal{L}(X_0,\lambda) \leq \mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \leq \mathcal{L}(X,\lambda_0),\quad X \geq 0,\quad \lambda \geq 0.$$

TEOREMA 2

X_0 adalah solusi dari masalah program konvek (persamaan (3)) bila hanya bila $[X_0,\lambda_0]$ adalah titik pelana non negatip dari persamaan (4).

BUKTI :

$\Longleftarrow$ *(Syarat cukup)*

Menurut definisi 18 sebagai titik pelana non negatip dari $\mathcal{L}(X,\lambda)$, $[X_0,\lambda_0]$ memenuhi :

$\mathcal{L}(X_0,\lambda) \leq \mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \leq \mathcal{L}(X,\lambda_0)$, $X \geq 0$, $\lambda \geq 0$ dengan $\mathcal{L}(X,\lambda) = f(X) + \lambda G(X)$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$, dan $G(X) = [g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)]$ maka

$$\left.\begin{aligned} f(X_0) + \lambda G(X_0) &\leq f(X_0) + \lambda_0 G(X_0) \\ &\leq f(X) + \lambda_0 G(X) \\ X \geq 0,&\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{........} (5)$$

Misalkan diambil 2 ruas dari kiri didapatkan,

$$\lambda G(X_0) \leq \lambda_0 G(X_0) \quad \text{...........................} (6)$$

$G(X_0)$ harus non negatip. Jika tidak, dapat diambil $\lambda_i > 0$ yang relatip besar sedemikian sehingga persamaan (6) tidak dipenuhi. Jika $\lambda = 0$ disubstitusi ke persamaan (6) diperoleh, $0 \le \lambda_0 G(X_0)$. Disisi lain untuk $\lambda_0 \ge 0$, $G(X_0) \le 0$ juga diperoleh $\lambda_0 G(X_0) \le 0$. Ini berarti $\lambda_0 G(X_0) = 0$. Demikianlah 2 ruas dari kanan (persamaan (5)) akan menjadi,

$$f(X_0) \le f(X) + \lambda_0 G(X),\ X \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Karena $\lambda_0 \ge 0$ maka $f(X_0) \le f(X)$, $X \ge 0$ bila hanya bila $G(X) \le 0$. Demikianlah menurut definisi 16 didapatkan X_0 sebagai solusi minimum masalah program konvek dari persamaan (3).

(Syarat perlu)

Karena $X_0 \ge 0$ adalah solusi dari masalah program konvek (persamaan (3)) maka akan dibuktikan bahwa $[X_0, \lambda_0]$ adalah titik pelana non negatip. Untuk maksud ini dibentuk himpunan $K_1, K_2 \subseteq R^{m+1}$ yaitu :

$$K_1 = \left\{ Y \mid f(X) \le y_0,\ g_i(X) < y_i,\ i = 1, 2, \dots, m \right.$$
$$\left. \text{untuk paling sedikit satu } X \ge 0 \right\}$$

dan $K_2 = \left\{ Y \mid f(X_0) > y_0,\ 0 > y_i,\ i = 1, 2, \dots, m \right\}$

Karena K_1, K_2 adalah konvek dan tidak mempunyai titik persekutuan maka terdapat hyperplane $H^T Y = \varphi$, $H \ne 0$ sedemikian sehingga $H^T Y_1 \ge H^T Y_2$, $\forall\ Y_1 \in K_1$, $\forall\ Y_2 \in K_2$. Karena $Y_2 \in K_2$ dapat diambil paling negatip maka

$H \geq 0$. Demikianlah untuk $Y_2^T = [\ f(X_0)\ 0\ 0 \ldots\ 0\ ]$ dan $Y_1^T = [\ f(X)\ g_1(X)\ \ g_2(X) \ldots\ g_m(X)\ ]$ diperoleh

$$h_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} h_i g_i(X) \geq h_0 f(X_0) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Karena diasumsikan $\forall\ g_i(X) < 0,\ i=1,2,\ldots,m$ maka jika diambil suatu $h_i > 0,\ i=1,2,\ldots,m$ diperoleh $\sum_{i=1}^{m} h_i g_i(X) < 0$ yang kontradiksi dengan $h_0 = 0$ yang disubstitusi ke persamaan (7). Demikianlah dapat disimpulkan bahwa $h_0 > 0$. Selanjutnya, jika persamaan (7) dibagi dengan h_0 diperoleh,

$$\left.\begin{array}{l} f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} g_i(X) \geq f(X_0),\ \lambda_{0_i} = h_0/h_i \\ i=1,2,\ldots,m \quad \text{atau} \quad \mathcal{L}(X,\lambda_0) \geq f(X_0) \end{array}\right\} \ldots (8)$$

Dengan substitusi $X = X_0$ ke persamaan (8) diperoleh $\mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \geq f(X_0)$ atau $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} g_i(X_0) \geq 0$. Di sisi lain, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} g_i(X_0) \leq 0,\ \forall\ g_i(X_0) \leq 0,\ \forall\ \lambda_{0_i} \geq 0,$ $i=1,2,\ldots,m$. Dengan demikian $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} g_i(X_0) = 0$ atau

$$\mathcal{L}(X_0,\lambda_0) = f(X_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Untuk $\forall\ g_i(X_0) \leq 0,\ \forall\ \lambda_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m$ juga diperoleh, $f(X_0) \geq f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X_0) = \mathcal{L}(X_0,\lambda\ )$ sedemikian sehingga dengan mengkombinasikan persamaan (8) dan (9) diperoleh,

$$\mathcal{L}(X_0,\lambda\ ) \leq \mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \leq \mathcal{L}(X,\lambda_o),\ \forall\ X \geq 0,\ \forall\ \lambda \geq 0.$$

Dan sesuai definisi 18, didapatkan titik pelana non negatip $[\ X_0,\lambda_0]$.

TEOREMA 3

Misalkan himpunan $S \subseteq E^n$ adalah konvek dan $f(X)$ adalah differensiabel ke X, maka $f(X)$ adalah konvek bila hanya bila,

$$f(X_1) - f(X_2) \geq (X_1 - X_2)^T \nabla f(X_2); \quad \forall X_1, X_2 \in S$$

BUKTI :

$\Leftarrow$ (*Syarat cukup*)

Karena S adalah himpunan konvek maka sesuai definisi 14 berlaku, $\forall X_1, X_2 \in S \longrightarrow \forall X_3 \in S$ dengan, $X_3 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S,\quad 0 \leq \lambda \leq 1$

Diketahui $f(X_1) - f(X_2) \geq (X_1 - X_2)^T \nabla f(X_2)$ maka dapat dibentuk,

$$f(X_1) - f(X_3) \geq (X_1 - X_3)^T \nabla f(X_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$f(X_2) - f(X_3) \geq (X_2 - X_3)^T \nabla f(X_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Jika persamaan (10) dan (11) masing-masing digandakan dengan λ dan $(1-\lambda)$ maka hasil jumlahannya adalah,

$$\lambda \{ f(X_1) - f(X_3) \} + (1-\lambda) \{ f(X_2) - f(X_3) \}$$

$$\geq \lambda (X_1 - X_3)^T \nabla f(X_3) + (1-\lambda)(X_2 - X_3)^T \nabla f(X_3)$$

atau, $\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \geq f(X_3)$

$$+ \{ \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 - X_3 \}^T \nabla f(X_3)$$

Demikianlah didapatkan,

$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \geq f(X_3)$.

Dan sesuai definisi 14, $f(X)$ adalah konvek.

→ (*Syarat perlu*)

Menurut definisi 14, jika $f(X)$ konvek maka berlaku

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \geq f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2)$$

atau

$$f(X_2) + \lambda \{ f(X_1) - f(X_2) \} \geq f(X_2 + \lambda \{ X_1 - X_2 \})$$

maka

$$f(X_1) - f(X_2) \geq \left\{ \frac{f(X_2 + \lambda \{ X_1 - X_2 \}) - f(X_2)}{\lambda} \right\}$$

Jika $\lambda \rightarrow 0$ maka menurut definisi 9 diperoleh,

$$f(X_1) - f(X_2) \geq \{ X_1 - X_2 \}^T \nabla f(X_2)$$

TEOREMA 4

Misalkan $X \geq 0$ dan $f(X)$ serta $g_i(X)$ adalah fungsi fungsi konvek yang differensiabel maka $[X_0, \lambda_0]$ adalah titik pelana non negatip dari $\mathcal{L}(X, \lambda)$ bila hanya bila,

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}(X_0, \lambda_0)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_0 \dfrac{\partial g_i(X_0)}{\partial x_j} \geq 0 \\ \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\} \ldots (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = X_0^T \left[\dfrac{\partial \mathcal{L}(X_0, \lambda_0)}{\partial X} \right] \\ = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{0_j} \left\{ \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} \dfrac{\partial g_i(X_0)}{\partial x_j} \right\} , \end{array} \right\} \ldots\ldots (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_0^T = \left[\; x_{0_1} \;\; x_{0_2} \cdots \; x_{0_n} \right] \;\geq\; 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (\ 14\ )$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0)}{\partial \lambda_i} = g_i(\ X_0) \leq 0,\ i=1,2,\ldots,m \right\} \cdots\cdots (\ 15\ )$$

$$\left.\lambda_0^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{0_i} g_i(X_0) = 0 \right\} \cdots\cdots (\ 16\ )$$

$$\left.\lambda_0^T = \left[\; \lambda_{0_1} \;\; \lambda_{0_2} \cdots \; \lambda_{0_m} \right] \;\geq\; 0 \right\} \cdots\cdots (\ 17\ )$$

BUKTI :

$\longleftarrow$ (*Syarat cukup*)

Karena $\mathcal{L}(\ X,\lambda_0)$ konvek untuk $\lambda_0 \geq 0$ maka sesuai teorema 3 berlaku,

$$\mathcal{L}(\ X,\lambda_0) \geq \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0) + \left\{ X-X_0 \right\}^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0)}{\partial X} \right].$$

Karena persamaan (12), (13) dan (14) maka,

$$\mathcal{L}(\ X,\lambda_0) \geq \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0) + X^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0)}{\partial X} \right]$$

$$\geq \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 18\ )$$

Selanjutnya pandang,

$\mathcal{L}(\ X_0,\lambda\ ) = f(\ X_0) + \lambda^T G(\ X_0)$ dan

$\mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0) = f(\ X_0) + \lambda_0^T G(\ X_0)$ dengan:

$G^T(\ X_0) = \left[\; g_1(\ X_0) \;\; g_2(\ X_0) \cdots \; g_m(\ X_0) \right]$

maka, $\mathcal{L}(\ X_0,\lambda\ ) - \mathcal{L}(\ X_0,\lambda_0) = \left\{ \lambda-\lambda_0 \right\}^T G(\ X_0)$

Karena persamaan (15), (16) dan (17) maka

$$\mathcal{L}(X_0,\lambda) - \mathcal{L}(X_0,\lambda_0) = \lambda^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}(X_0,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right]$$
$$\leq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Demikianlah dari persamaan (18) dan (19) didapatkan $X_0 \geq 0$ dan $\lambda_0 \geq 0$ yang memenuhi :

$\mathcal{L}(X_0,\lambda) \leq \mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \leq \mathcal{L}(X_0,\lambda_0)$; $X \geq 0$, $\lambda \geq 0$

sedemikian sehingga menurut definisi 18, $[X_0,\lambda_0]$ adalah titik pelana non negatip dari $\mathcal{L}(X,\lambda)$.

(Syarat perlu)

Andaikan persamaan (12) dan (13) tidak dipenuhi untuk semua $X_0 \geq 0$ sebagaimana yang dinyatakan oleh persamaan (14). Adapun $\mathcal{L}(X,\lambda_0)$ adalah konvek untuk setiap $\lambda_0 \geq 0$. Demikianlah jika ada $\mathcal{L}_x(X_0,\lambda_0) < 0$ maka ada $\bar{x}_j > x_{0_j}$, $j=1,2,\ldots,n$ sedemikian sehingga $\mathcal{L}(\bar{X},\lambda_0) < \mathcal{L}(X_0,\lambda_0)$. Kontradiksi dengan definisi 18. Sebab sebagai titik pelana non negatip, $[X_0,\lambda_0]$ memenuhi $\mathcal{L}(X_0,\lambda_0) \leq \mathcal{L}(X,\lambda_0)$, $X \geq 0$. Demikian juga jika terdapat $X_0^T \left[\mathcal{L}_x(X_0,\lambda_0) \right] \neq 0$ maka ada $\bar{x}_j > x_{0_j} > 0$, $j=1,2,\ldots,n$ dan ada $\mathcal{L}_x(X_0,\lambda_0) \neq 0$ sedemikian sehingga $\mathcal{L}(\bar{X},\lambda_0) < \mathcal{L}(X_0,\lambda_0)$. Hal ini pun kontradiksi dengan definisi 18. Jadi untuk semua $X_0 \geq 0$ harus berlaku persamaan (12) dan (13). Adapun bukti dari persamaan (15), (16) dan (17) telah dibicarakan pada teorema 2 (*Syarat perlu*).